

XLI Летняя Многопредметная Школа. 1–26 июля 2025 года



9 класс. Группа профи

Учебные материалы

Преподаватели:

Шамов С.В.

Уракова Е.М.

Шарафутдинов А.Ш.

Винокурова Е.И.

Кречмер Е.А.

В науке нет широкой столбовой дороги,
и только тот может достигнуть её сияющих вершин,
кто, не страшась усталости, карабкается
по её каменистым тропам.

Дорогие ученики!

Поздравляем с завершением долгожданной Кировской ЛМШ 2025 года и успешным освоением программы 9 класса группы профи! Вместе мы преодолели интенсивный курс по проективной геометрии, аддитивной комбинаторике, теореме Кронекера, непрерывности и асимптотике, целозначным многочленам и многому другому.

В качестве напутственных слов желаем вам не останавливаться на достигнутом, проводить время с пользой, ставить цели и достигать их!

Vita brevis, ars longa.



Оглавление

1	Аффинные преобразования - 1	1
2	Иррациональные и рациональные числа	3
3	Разной — 1	3
4	Многочлены с целыми коэффициентами	4
5	Неравенства с фиксированными величинами	5
6	Разной — 2	6
7	Аддитивная комбинаторика. Разминка	6
8	Аддитивная комбинаторика. Основной	7
9	Аффинные преобразования - 2	8
10	Подсчёты в графах	9
11	Теорема Кронекера	10
12	Разностный многочлен	11
13	Проективная плоскость	12
14	Предел последовательности	14
15	Аддитивная комбинаторика. Завершение	16
16	Двойное отношение	17
17	Внутренний матбой	19
18	Теорема Чебы в направленных	20
19	Весовые коэффициенты	22
20	Связность и разделяющие множества	23
21	Непрерывность в точке	25
22	Полярное соответствие	26
23	Линейность в комбинаторике	28
24	Матбой 8-9 профи	29
25	Матбой 9-10 профи	30
26	Многочлены: асимптотика и непрерывность	31
27	Гармонический четырёхугольник	32
28	Последовательности	34
29	Теорема Турана	35
30	Асимптотика в комбинаторике и ТЧ	36
31	Построения одной линейкой	37
32	Результаты заключительного теста	38

Аффинные преобразования - 1

3 июля

От лат. *affinis* «смежный, родственный»

Опр. Пусть на плоскости дана пара неколлинеарных векторов OA и OB . Тогда любой вектор OC единственным образом представляется в виде $OC = x \cdot OA + y \cdot OB$. Пара вещественных чисел (x, y) называется координатами точки C относительно системы координат OAB .

Опр. Выберем на плоскости две системы координат OAB и $O'A'B'$. Каждой точке C сопоставим точку C' так, чтобы координаты C' относительно $O'A'B'$ совпадали с координатами C относительно OAB . Преобразования такого вида называются аффинными.

I. Проверьте, что для любого аффинного преобразования существует обратное, тоже аффинное; что композиция аффинных преобразований — снова аффинное.

II. Убедитесь, что следующие преобразования являются аффинными: параллельный перенос, поворот, осевая симметрия (и вообще любое движение); гомотетия, сжатие (растяжение) по оси ординат с некоторым коэффициентом.

III. Докажите основные свойства аффинного преобразования:

1. Биективно отображает плоскость в себя;
2. Равные друг другу вектора снова переводит в равные;
3. Сумму двух векторов переводит в сумму их образов;
4. Коллинеарные векторы переводит в коллинеарные и сохраняет их отношение;
5. Прямые переводит в прямые;
6. Параллельные прямые переводит в параллельные.

Без доказательства. В качестве равносильных определений аффинного преобразования достаточно взять набор свойств 2, 3, 4, либо всего лишь 1, 5.

1. Докажите, что существует аффинное преобразование, переводящее:

- (а) произвольный треугольник в правильный;
- (б) произвольный параллелограмм в квадрат;
- (в) произвольную трапецию в равнобедренную с таким же отношением оснований.

Загадка. Почему при помощи одной линейки нельзя опустить перпендикуляр? Начертить правильный треугольник? Провести биссектрису угла?

2. (а) Докажите, что в любой трапеции точка пересечения диагоналей, середины оснований и точка пересечения боковых сторон лежат на одной прямой.

(б) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через точку B проведена прямая, параллельная стороне CD и пересекающая диагональ AC в точке P , а через точку C — прямая, параллельная стороне AB и пересекающая диагональ BD в точке Q . Докажите, что прямая PQ параллельна основаниям трапеции, а точка пересечения BP и CQ лежит на прямой из предыдущего пункта.

3. Точки A_1, B_1, C_1 делят соответственно стороны BC, CA и AB треугольника ABC в одном и том же отношении. Докажите, что совпадают точки пересечения медиан треугольников $ABC, A_1B_1C_1$ и треугольника с вершинами в точках пересечения прямых AA_1, BB_1, CC_1 .

4. (а) Докажите, что неподвижные точки аффинного преобразования образуют либо всю плоскость, либо прямую, либо одноэлементное множество, либо пустое множество.

(б) Аффинное преобразование циклически меняет местами вершины треугольника ABC т.е. переводит точку A в точку B , точку B в точку C , а точку C в точку A . Найти все неподвижные точки этого преобразования.

5. (а) Точки M и N — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Отрезки AM и BN пересекаются в точке P . Найдите, в каких отношениях точка P делит эти отрезки.

(б) Дан параллелограмм $ABCD$. Произвольная прямая пересекает лучи AB, AC и AD соответственно в точках P, Q и R . Докажите, что

$$\frac{AB}{AP} + \frac{AD}{AR} = \frac{AC}{AQ}.$$

6. (а) Дан треугольник с тремя чевианами, пересекающимися в одной точке. Можно ли аффинным преобразованием перевести его в треугольник с медианами? С высотами? С биссектрисами?

(б) Докажите, что любой выпуклый четырёхугольник, отличный от трапеции, аффинным преобразованием можно перевести в четырёхугольник с парой противоположных прямых углов.

7. (Прямая Ньютона-Гаусса) Прямые, содержащие противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$, пересекаются в точках K и L .

(а) Докажите, что середины отрезков AC, BD и KL лежат на одной прямой;

(б) Докажите, что точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$, лежит на той же прямой.

8. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = NC$, Q — точка пересечения отрезков AN и CM . Докажите, что DQ — биссектриса угла D .

Иррациональные и рациональные числа

3 июля

1. Докажите иррациональность чисел: **(а)** $\sqrt[3]{3}$, **(б)** $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, **(в)** $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}$.
2. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?
3. Пусть α — такое действительное число, что числа $\alpha^2 + \alpha$ и $\alpha^3 + 2\alpha$ — рациональные. Докажите, что α тоже рационально.
4. Есть 100 вещественных чисел a_1, \dots, a_{100} . Докажите, что найдётся такое вещественное b , что все числа $a_i + b$ иррациональны.
5. Числа x, y и z таковы, что все три числа $x + yz$, $y + zx$ и $z + xy$ рациональны, а $x^2 + y^2 = 1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.
6. Иррациональный взрыв с эпицентром в точке P удаляет из плоскости все точки, находящиеся на иррациональном расстоянии от точки P . Какое наименьшее количество иррациональных взрывов достаточно для того, чтобы удалить из плоскости все точки?
7. На доске написаны несколько различных чисел. Известно, что сумма любых трёх написанных чисел рациональна, а сумма любых двух написанных чисел — иррациональна. Какое наибольшее количество чисел может быть написано на доске?
8. Про ненулевые различные числа a_1, a_2, \dots, a_{10} известно, что для любых $i \neq j$ хотя бы одно из чисел $a_i + a_j$ или $a_i a_j$ рационально. Докажите, что квадраты этих чисел — рациональные числа.

Разнобой — 1

3 июля

1. Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC . Точка D на отрезке AB и точка E на отрезке AC таковы, что DE проходит через середину отрезка AH и $\angle DHE = 90^\circ$. Точка X на прямой DE такова, что $HX \parallel BC$. Докажите, что $\angle BXC = 90^\circ$.
2. Последовательность $n \geq a_1 > a_2 > \dots > a_k$ такова, что $\text{НОК}(a_i, a_{i+1}) \leq n$ для любого $1 \leq i < k$. Докажите, что для любого i выполняется $ia_i \leq n$.
3. У Степана Владимировича нашлось 2025 конфет 45 видов. Докажите, что он может раздать их 45 детям так, чтобы каждый ребёнок получил по 45 конфет, среди которых не найдётся трёх конфет разных видов.

4. На длинном столе в ряд лежат 2025 кучек по одному ореху. Лука и Олег ходят по очереди. За ход нужно найти две какие-нибудь соседние кучки, правая из которых не меньше левой, и объединить их в одну. Тот, кто делает последний ход, выигрывает. Кто может обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

Многочлены с целыми коэффициентами

4 июля

1. Известно, что квадратные трехчлены $ax^2 + bx + c$ и $(c - b)x^2 + (c - a)x + (a + b)$ с целыми коэффициентами имеют общий корень. Докажите, что $a + b + 2c$ делится на 3.
2. Все коэффициенты некоторого непостоянного многочлена целые и по модулю не превосходят 2025. Докажите, что любой положительный корень этого многочлена больше чем $1/2026$.

Теорема Безу.

1. Для любого многочлена $P(x)$ многочлен $P(x) - P(a)$ делится на $x - a$.
2. Пусть $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда для любых целых a и b разность $Q(a) - Q(b)$ делится на $a - b$.
3. В частности, $Q(a + b) - Q(b)$ делится на a .
Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $Q(a) \equiv Q(b) \pmod{n}$.

3. Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше тысячи, и $P(19) = P(94) = 1994$.
4. Дан многочлен с целыми коэффициентами, принимающий значение 7 в четырёх различных целых точках. Докажите, что он не может принимать значение 14 ни в какой целой точке.
5. Найдите все многочлены $f(x)$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющие следующему условию: для любого простого p найдутся натуральные m и n , такие что $f(p^n) = p^m$.
6. Найдите все возможные значения n , при которых существуют многочлен степени n с целыми коэффициентами, который принимает значение n в n различных целых точках и равен 0 в нуле.
7. Найдите все непостоянные многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами такие, что $P(P(x) + x)$ является простым числом при бесконечном количестве целых x .
8. Даны натуральные числа a и b такие, что $a \geq 2b$. Существует ли многочлен $P(x)$ степени больше 0 с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, \dots, b - 1\}$ такой, что $P(a)$ делится на $P(b)$?

9. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Обозначим через $n(P)$ количество решений уравнения $P(x)^2 = 1$ в целых числах. Докажите, что $n(P) \leq \deg(P) + 2$.

Неравенства с фиксированными величинами

4 июля

Неравенство Коши. Для положительных x_1, x_2, \dots, x_n выполнены неравенства:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Обычно в задачах фиксируют значение одного из этих четырёх выражений.

Однородность. Если выражение однородно, то есть не меняется при замене $x_i \mapsto \lambda x_i$, то можно подобрать λ такое, чтобы сумма (произведение, сумма квадратов, ...) переменных равнялась 1. Наоборот, если некая величина зафиксирована, можно избавиться от этого условия, сводя неравенство к однородному.

1. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$. Докажите, что

$$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}.$$

2. Для положительных a, b, c , таких что $a + b + c = 3$, докажите неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 6.$$

3. (а) Для положительных a, b, c , таких что $a + b + c = 1$, докажите неравенство

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 1.$$

(б) Докажите, что если $x, y, z > 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq \sqrt{3}$.

4. Для положительных a и b , удовлетворяющих условию $ab = 1$, докажите неравенство

$$\frac{a}{a^2 + 3} + \frac{b}{b^2 + 3} \leq \frac{1}{2}.$$

5. Положительные x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{xy + z} + \frac{1}{yz + x} + \frac{1}{zx + y} \geq \frac{3}{2}.$$

6. Сумма четвертых степеней вещественных чисел a, b и c равна $\frac{3}{2}$. Докажите неравенство

$$a\sqrt{b^2 + c^2} + b\sqrt{a^2 + c^2} + c\sqrt{a^2 + b^2} \leq 3.$$

7. Известно, что $a, b, c > 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{3a^2 + b^2 + 2ca} + \frac{b}{3b^2 + c^2 + 2ab} + \frac{c}{3c^2 + a^2 + 2bc} \leq \frac{3}{2}.$$

8. Для положительных чисел a, b, c выполнено равенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

9. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ca} + \frac{1}{c + ab} \geq \frac{7}{1 + abc}.$$

Разнобой — 2

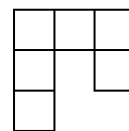
4 июля

1. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющие равенству $P(x + 1)P(x - 1) = P(x^2 - 1)$.

2. Докажите, что для любого $n \geq 3$ можно выбрать n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, так, чтобы расстояние между любыми двумя выбранными точками было иррациональным, а площадь любого треугольника с вершинами в выбранных точках — рациональной.

3. Найдите все натуральные $n \geq 2$, удовлетворяющие условию $\frac{\sigma(n)}{p(n)-1} = n$. Напоминаем, что $\sigma(n)$ обозначает сумму всех делителей числа n , а $p(n)$ — наибольший простой делитель числа n .

4. Назовём *крюком* клетчатую фигуру, изображённую на рисунке слева. При каких m и n прямоугольник $m \times n$ можно разрезать на *крюки*?



Аддитивная комбинаторика. Разминка

5 июля

1. (а) Множество A состоит из n целых чисел. Докажите, что существует непустое подмножество $B \subset A$, сумма чисел в котором делится на n .

(б) В ряд выписаны натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_7 . Докажите, что можно выбрать некоторые из них и поставить перед каждым выбранным числом $+$ или $-$ так, чтобы значение полученного выражения делилось на 101.

2. Дано 70 различных натуральных чисел, не превосходящих 200. Докажите, что какие-то два из них различаются на четыре, пять или девять.
3. Среди натуральных чисел от 1 до 365 выбрали **(а)** 39; **(б)** 29. Докажите, что среди них найдутся 4 числа a, b, c, d таких, что $a + b = c + d$.
4. Сто одно натуральное число из диапазона от 1 до 10^6 покрасили в синий цвет. Докажите, что можно выбрать 100 красных чисел из этого же диапазона так, чтобы все возможные суммы красного и синего числа были попарно различными.
- Если $(G, +)$ — аддитивная группа, $A, B \subset G$, то положим $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, $A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$.
5. Докажите, что если $A, B \subset \mathbb{R}$, $|A| \geq 2$ и $|B| \geq 2$, и $|A + B| = |A| + |B| - 1$, то A, B — арифметические прогрессии с одинаковой разностью.
6. Даны натуральные числа $n < m < k + 2$. Найдите размер наибольшего подмножества в $\{1, 2, \dots, k\}$, в котором никакие n различных элементов не дают в сумме m .
7. **(а)** Придумайте множество, состоящее из целых чисел, для которого $|A + A| > |A - A|$.
- (б)** Докажите, что частное $|A + A|/|A - A|$, где $A \subset \mathbb{Z}$, бывает сколь угодно большим.

Аддитивная комбинаторика. Основной

5 июля

1. Рассмотрим два ненулевых множества A_0, B в абелевой аддитивной группе $(G, +)$. Пусть $A \subset A_0$ непустое множество, для которого отношение $|A + B|/|A|$ минимально:
- $|A + B| = K \cdot |A|$;
 - $|Z + B| \geq K \cdot |Z|$, $Z \subset A_0$.
- (а)** Для любого $x \in G$ докажите, что $|A + B + x| \leq K \cdot |A + x|$.
- (б)** Для любого непустого множества C и любого $x \in G$ пусть $Z = \{a \in A \mid a + B + x \subset A + B + C\}$. Докажите, что $|A + C| + |A| - |Z| \leq |A + (C \cup \{x\})|$.
- (в) Лемма Петридиса.** Докажите, что для любого непустого множества C имеет место неравенство $|A + B + C| \leq K \cdot |A + C|$.
2. **Неравенство Плюннеке.** Докажите, что если $|A + A| = K \cdot |A|$, то $|n \cdot A| \leq K^n \cdot |A|$, где $n \cdot A = A + A + \dots + A$.
3. **Неравенство треугольника Русы.** Пусть X, Y, Z — подмножества абелевой группы $(G, +)$. Докажите неравенство $|X - Y| \cdot |X - Z| \geq |X| \cdot |Y - Z|$.
- Пусть $A, B \subset (G, +)$ — конечные подмножества. Элемент $c \in A + B$ будем называть *уникальнопредставимым*, если он представим в виде $c = a + b$, $a \in A$, $b \in B$ единственным образом (то есть $c = a_0 + b_0$, $a_0 \in A$, $b_0 \in B$, и если $c = a + b$, $a \in A$, $b \in B$, то $a = a_0$, $b = b_0$).

4. Докажите, что если уникальнопредставимый элемент существует, то $|A| + |B| \leq |G| + 1$.
5. Пусть $c_0 = a_0 + b_0$ — уникальнопредставимый элемент. Для $a \in A$ обозначим $J_a := \{b \in B \setminus \{b_0\} \mid a + b \notin A\}$.
- (а) Докажите, что существует такой $a \in A \setminus \{a_0\}$, что $J_a \neq \emptyset$.
- (б) Пусть a из предыдущего пункта, $B' = B \setminus J_a$, $A' = A \cup (J_a + a)$. Докажите, что $|A'| + |B'| = |A| + |B|$.
- (в) Докажите, что $|A' + B'| = |A + B|$.
- (г) **Теорема Кемпермана – Шерка.** Докажите, что если существует уникальнопредставимый элемент, то $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$.

Аффинные преобразования - 2

5 июля

1. Докажите, что при аффинном преобразовании не меняется отношение площадей:
- (а) Двух треугольников с общим углом; (в) Двух произвольных треугольников;
- (б) Двух треугольников с общей стороной; (г) Двух выпуклых многоугольников.
2. (а) Докажите, что медианы треугольника делят его на 6 равновеликих (т.е. равных по площади) треугольников. (б) Из медиан треугольника построили новый треугольник. Найдите отношение его площади к площади исходного треугольника.
3. Через точку P , лежащую внутри треугольника ABC , проведены три прямые, параллельные сторонам AB , BC и CA и пересекающие стороны BC , AC и AB соответственно в точках A' , B' и C' . (а) Докажите, что

$$\frac{PA'}{AB} + \frac{PB'}{BC} + \frac{PC'}{CA} = 1.$$

- (б) Пусть S_1 , S_2 , S_3 — площади трёх треугольников, которые высекают данные прямые, а S — площадь треугольника ABC . Докажите, что $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$.
4. На сторонах AB , BC , CA треугольника ABC выбраны соответственно точки M , N , P и построены симметричные им точки M_1 , N_1 , P_1 относительно середин этих сторон соответственно. Докажите, что треугольники MNP и $M_1N_1P_1$ равновелики.
5. В данный остроугольный треугольник ABC впишите прямоугольник заданной площади так, чтобы две вершины лежали на стороне AB , а две другие — по одной на оставшихся сторонах. Какую наибольшую площадь он может занимать?
6. На сторонах AB , BC , CA треугольника ABC взяты точки C_1 , A_1 , B_1 соответственно такие, что $AC_1/AB = BA_1/BC = CB_1/CA = 1/3$. Докажите, что площадь треугольника, образованного прямыми AA_1 , BB_1 , CC_1 равна $1/7$ площади ABC .

7. Площадь треугольника ABC равна единице. На его сторонах AB , BC и AC отмечены произвольные точки K , L и M соответственно. Докажите, что площадь хотя бы одного из треугольников MAK , KBL или LCM не превосходит $1/4$.

8. (а) Докажите, что два четырёхугольника переводятся друг в друга аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда диагонали этих четырёхугольников делятся точками пересечения в соответственно равных соотношениях.

(б) Докажите, что любой четырёхугольник можно перевести аффинным преобразованием во вписанный четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями.

(в) Через середину каждой диагонали выпуклого четырёхугольника проводится прямая, параллельная другой диагонали. Эти прямые пересекаются в точке O . Докажите, что отрезки, соединяющие точку O с серединами сторон четырёхугольника, делят его площадь на равные части.

Подсчёты в графах

7 июля

1. В турнире на n вершинах исходящая и входящая степени i -ой вершины равны a_i и b_i соответственно.

(а) Посчитайте количество ациклических треугольников.

(б) Докажите, что $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$.

2. В университете учатся n студентов, каждый из которых записался на несколько спецкурсов. Спецкурс открывается, если на него записались хотя бы два человека. После открытия спецкурсов оказалось, что если какие-то два студента одновременно посещают курсы A и B , то на курсах A и B разное количество участников. Докажите, что количество открытых спецкурсов не превышает $(n - 1)^2$.

3. В стране $3k + 1$ город, любые два из которых соединены дорогой. Все дороги делятся на 3 вида, причём из каждого города выходит по k дорог каждого вида. Назовём четвёрку городов хорошей, если в этой четвёрке есть ровно один город, все три дороги из которого в остальные города четвёрки имеют разные виды. Докажите, что количество хороших четвёрок чётно.

4. В отборе на Олимпиаду принимали участие a спортсменов, которых оценивали b (b нечётно) судей. Каждый судья про каждого участника сказал, прошёл тот отбор или нет. Пусть число k таково, что у любых двух судей совпало мнение не более, чем по k участникам. Докажите, что $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

5. Группа студентов из 15 человек решала тест, состоящий из 15 вопросов. Каждый студент ответил правильно ровно на шесть из них. Докажите, что есть такая пара студентов, что хотя бы на три вопроса каждый из них ответил верно.

6. Дан турнир на $n \geq 4$ вершинах. Через a_i и b_i обозначим исходящую и входящую степени i -ой вершины соответственно. Четвёрку вершин A, B, C и D назовём *плохой*, если A, B и C выиграли у D , а также друг у друга по циклу. Оказалось, что в графе нет плохих четвёрок. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^3 \geq 0.$$

7. В некоторой компании людей для любых двух человек имеется ровно один третий, кого они оба уважают. Уважение не обязательно симметрично. Докажите, что для любых двух человек имеется ровно один третий, который уважает их обоих.

Теорема Кронекера

7 июля

1. Кузнечик прыгает по окружности длины 1. Каждую секунду он прыгает по часовой стрелке на дугу длины α .

(а) При каких α он сможет побывать лишь в конечном числе точек окружности?

(б) Докажите, что когда-нибудь он окажется на расстоянии меньше чем $\frac{1}{1000}$ от своего исходного положения (расстояние считается по окружности).

(в) При каких α кузнечик сможет рано или поздно посетить любую дугу окружности?

(г) **Теорема Кронекера.** Если $\alpha > 0$ — иррациональное число, то произвольный интервал (a, b) содержит число вида $n\alpha - m$, где m, n — неотрицательные целые числа.

2. **Теорема Кронекера-Дирихле.** Докажите, что для любого действительного числа α и натурального числа m существует такое приближение рациональным числом $\frac{p}{q}$, что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qm} \leq \frac{1}{q^2}$.

Опр. Логарифмом числа b по основанию a называется решение уравнения $a^x = b$. Обозначается логарифм следующим образом: $x = \log_a b$.

I. Проверьте следующие свойства:

(а) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$; (б) $\log_a b^c = c \log_a b$; (в) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$.

3. (а) Покажите, что решение уравнения $2^x = 10$ иррационально. (б) Докажите, что числа вида 2^n при натуральных n могут начинаться на любую наперёд заданную комбинацию цифр.

4. Кузнечик прошел курсы повышения квалификации и теперь он умеет делать два прыжка: с длинами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ в обе стороны. Теперь кузнечик готов прыгать по прямой. Докажите, что он сможет попасть в любой отрезок на прямой.

- 5. (а)** В каждой целочисленной точке плоскости сидит круглый дятел радиуса r . Докажите, что куда ни глянь, всюду дятлы. Другими словами, докажите, что любой луч $y = kx$ пересекает какого-то дятла, помимо центрального.
- (б)** В углах прямоугольного бильярда находятся 4 лузы радиуса $1/1000$. Из одного из углов вылетает точечный шарик, который в дальнейшем движется прямолинейно, отражаясь от бортов по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что шарик рано или поздно попадет в лузу.
- 6.** Докажите, что степень двойки может начинаться на те же 2025 цифр, что и оканчиваться (конечно, число при этом должно быть минимум 4050-значное).
- 7. (а)** Два кузнечика одновременно начинают прыгать по окружности из одной точки, один — с шагом α , другой — с шагом β . Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ рано или поздно оба одновременно окажутся в ε -окрестности стартовой точки.
- (б)** Докажите, что не позднее чем за n^2 шагов оба они окажутся на расстоянии меньше $\frac{1}{n}$ от стартовой точки.
- 8.** Существует ли такое натуральное n , что число 2^n начинается с цифр 12345, а число 3^n — с цифр 56789?
- 9.** Докажите, что для любого вещественного числа α и фиксированного $r > 0$ найдутся натуральные n и m , такие что

$$|\alpha - (\sqrt[n]{n} - \sqrt[m]{m})| < r.$$

Разностный многочлен

8 июля

Опр. Многочлен называется целозначным, если он принимает целые значения при всех целых значениях аргумента.

Опр. Разностным многочленом для многочлена $P(x)$ называется многочлен

$$\Delta P(x) = P(x+1) - P(x).$$

- I.** Приведите пример целозначного многочлена, старший коэффициент которого равен $1/n$ для заданного натурального n .
- II.** Верно ли, что степень многочлена $\Delta P(x)$ на один меньше, чем степень $P(x)$?
- 1.** Верно ли, что многочлен степени n является целозначным в том и только том случае, когда он принимает целые значения в точках **(а)** от 1 до n ; **(б)** от 0 до n ?

2. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ найдётся единственный, с точностью до прибавления константы, многочлен $Q(x)$, такой что $P(x) = \Delta Q(x)$.
3. Для заданного n найдите такой многочлен $P(x)$ степени n , что $n \cdot P(x) = x \cdot \Delta P(x)$.

Опр. Рассмотрим многочлены $C_x^k = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$ ($k = 1, 2, \dots$). При $x = n > k$, $n \in \mathbb{N}$ многочлен C_x^k равен биномиальному коэффициенту с тем же обозначением.

- III. Какие значения принимает C_x^k при остальных целых значениях переменной?
4. Чему равен разностный многочлен $\Delta P(x)$ для $P(x) = C_x^k$?
5. (а) Докажите, что любой многочлен $P(x) \neq 0$ единственным образом представляется в виде $P(x) = a_n C_x^n + a_{n-1} C_x^{n-1} + \dots + a_0$, где $a_n \neq 0$.
- (б) Какие коэффициенты будут у многочлена $\Delta P(x)$, если тоже представить его в таком виде?
6. Докажите, что существует многочлен $P(x)$, такой что $P(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$ при всех натуральных n . Какая у него степень и старший коэффициент?
7. Докажите, что в разложении $P(x) = a_n C_x^n + a_{n-1} C_x^{n-1} + \dots + a_0$ все коэффициенты a_i целые тогда и только тогда, когда $P(x)$ — целозначный.

Без доказательства. Коэффициенты в разложении

$$x^n = a_n C_x^n + a_{n-1} C_x^{n-1} + \dots + a_0$$

вычисляются по следующему правилу: $\frac{a_k}{k!}$ — это число способов разбить n элементов на k непустых подмножеств. В частности, $a_n = n!$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$.

Проективная плоскость

8 июля

Опр. Пусть Δ_1 и Δ_2 — две плоскости в пространстве, S — точка, не лежащая ни на одной из этих плоскостей. Для каждой точки A плоскости Δ_1 проведём прямую SA до пересечения с плоскостью Δ_2 в точке A' . Такое соответствие называется центральной проекцией.

- I. Будем считать, что плоскости не параллельны друг другу. Проверьте, что
- (а) Точки Δ_1 , для которых не определён образ, а также точки Δ_2 , для которых нет прообраза, представляют собой две прямые (обозначим их l_1 и l_2 соответственно).

- (б) Если три точки лежали на одной прямой, то и после центрального проектирования они окажутся на одной прямой. Тем не менее, порядок точек может не сохраниться.
- (в) Любые две прямые, параллельные l_1 , снова переходят в параллельные. На них сохраняется отношение коллинеарных векторов.
- (г) Прямые, параллельные друг другу, но не l_1 , переходят в две прямые, которые пересекаются на l_2 .

Опр. Добавим к плоскости множество бесконечно удалённых точек, по одной для каждого семейства параллельных прямых. Будем считать, что каждая такая точка принадлежит всем прямым своего семейства и, соответственно, все эти прямые проходят через одну точку. В свою очередь, все бесконечно удалённые точки образуют одну бесконечно удалённую прямую.

Опр. Прямая, дополненная бесконечно удалённой точкой, называется проективной прямой. Расширенная таким образом плоскость называется проективной плоскостью. Взаимно-однозначное отображение проективной плоскости в себя, которое переводит прямые в прямые, называется проективным преобразованием.

II. Докажите, что

- (а) Через любые две (в т.ч. бесконечно удалённые) точки проективной плоскости проходит ровно одна прямая. Любые две прямые пересекаются ровно в одной точке.
- (б) Можно доопределить операцию центрального проектирования для бесконечно удалённых точек так, чтобы получилось проективное преобразование.
- (в) Для любых двух точек проективной плоскости существует центральное проектирование, которое отправляет их на бесконечно удалённую прямую.

Загадка. Почему при помощи одной линейки нельзя провести прямую, параллельную данной? Построить середину отрезка?

III. Убедитесь, что любое аффинное преобразование можно дополнить до проективного преобразования, которое переводит бесконечно удалённую прямую в себя.

1. Дана четвёрка точек A, B, C, D , никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что

- (а) Существует центральное проектирование, переводящее их в параллелограмм.
- (б) Существует проективное преобразование, переводящее их в произвольную четвёрку точек с тем же свойством.

2. Дан угол и точка P внутри него. Из точки P проводятся две прямые, a и b , которые пересекают стороны угла в точках A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно. Докажите, что ГМТ точек пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1 — одна прямая.

3. В треугольнике ABC чевианы AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке. Прямые BC и B_1C_1 , CA и C_1A_1 , AB и A_1B_1 пересекаются в точках A' , B' и C' соответственно. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

4. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, а E и F — точки пересечения продолжений сторон AB и CD , BC и AD соответственно. Прямая EO пересекает стороны AD и BC в точках K и L , а прямая FO пересекает стороны AB и CD в точках M и N . Докажите, что точка X пересечения прямых KN и LM лежит на прямой EF .

5. Теорема Дезарга. Прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что точки пересечения прямых AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1 лежат на одной прямой.

6. Теорема Паппа. На прямых l_1 и l_2 отмечены точки A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что точки

$$X = A_1B_2 \cap A_2B_1, \quad Y = B_1C_2 \cap B_2C_1, \quad Z = C_1A_2 \cap C_2A_1$$

лежат на одной прямой.

7. Продолжения сторон AB и CD , BC и AD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках E и F соответственно. Внутри четырёхугольника отмечена точка P . Прямые EP и BC пересекаются в точке K , а прямые FP и AB в точке M . Докажите, что точка пересечения прямых MC и AK лежит на прямой PD .

8. Даны два треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O_1 , а прямые AB_1 , BC_1 и CA_1 пересекаются в точке O_2 . Докажите, что прямые AC_1 , BA_1 и CB_1 тоже пересекаются в одной точке.

Предел последовательности

9 июля

Опр. Дана бесконечная последовательность $\{a_n\}$ вещественных чисел. Число a называется пределом этой последовательности, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой индекс N , что $|a_n - a| < \varepsilon$ при всех $n > N$. В этом случае говорят, что $\{a_n\}$ сходится (или стремится) к числу a и пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

1. Проверьте следующие свойства:

(а) Последовательность не может сходиться к двум числам сразу.

(б) Если последовательность сходится, то любая её (бесконечная) подпоследовательность сходится к тому же числу.

2. Найдите пределы последовательностей:

$$(a) \ a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n};$$

$$(b) \ a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n};$$

$$(b) \ a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2};$$

$$(r) \ a_n = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{k^n}, \text{ где } k \in \mathbb{N}.$$

3. (a) Последовательность $\{a_n\}$ сходится. Элементы этой последовательности переставили в произвольном порядке. Докажите, что полученная последовательность тоже сходится.

(б) **Лемма о двух милиционерах.** Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся к одному и тому же числу. Последовательность $\{c_n\}$ такова, что $a_n \leq c_n \leq b_n$ при всех n . Докажите, что $\{c_n\}$ сходится к этому же числу.

4. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся к числам a и b соответственно.

(a) **Предельный переход в неравенствах.** Докажите, что если $a_n < b_n$ при всех n , то $a \leq b$. Приведите пример, когда достигается равенство.

(б) Проверьте любые два из следующих свойств:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = a/b, \text{ где } b \neq 0.$$

Лемма Кантора о вложенных отрезках

Пока ещё мы не пользовались тем, что числа именно *вещественные*. Те же самые свойства выполнены, если ограничиться рациональными или даже целыми числами. Отличие вещественных чисел состоит в так называемой аксиоме полноты. Вот одна из её эквивалентных формулировок:

Лемма. Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$ — система вложенных отрезков на вещественной прямой. Тогда их пересечение непусто. Более того, если длины отрезков стремятся к нулю, то в пересечении лежит ровно одна точка.

5. (a) Приведите пример последовательности рациональных чисел $\{a_n\}$, которая сходится к иррациональному числу. (б) Приведите пример такой системы вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, которая задаёт иррациональную точку.

6. Докажите, что следующие условия равносильны:

(a) последовательность вещественных чисел $\{a_n\}$ сходится;

(б) для любого натурального k все члены последовательности, кроме конечного числа, лежат в некотором отрезке длины $1/2^k$.

Опр. Будем говорить, что последовательность вещественных чисел $\{a_n\}$ ограничена сверху, если существует такое число C , что $a_n \leq C$ при всех n .

7. (а) Последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху и неубывает. Докажите, что она сходится.
- (б) Последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху. Докажите, что среди всех чисел C , которые ограничивают $\{a_n\}$ сверху, найдётся наименьшее¹.
- (в) Последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху и снизу. Докажите, что она содержит сходящуюся подпоследовательность.
8. Пусть a и b — два вещественных числа. Докажите, что между ними найдётся (а) вещественное; (б) рациональное; (в) иррациональное число.
9. Найдите пределы последовательностей:

$$(а) a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}; \quad (г) a_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}};$$

$$(б) a_n = (1 - \lambda)^n, \text{ где } \lambda \in (0, 1);$$

$$(в) a_n = \frac{1 + \lambda^n}{(1 + \lambda)^n}, \text{ где } \lambda > 0; \quad (д) a_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}.$$

10. Не вычисляя предел, докажите, что следующие последовательности сходятся:

$$(а) a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right); \quad (в) a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!};$$

$$(б) a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}; \quad (г) a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Аддитивная комбинаторика. Завершение

9 июля

Опр. Группа вычетов по простому модулю p обозначается символом \mathbb{F}_p .

Теорема Коши-Дэвенпорта. Пусть A и B — непустые подмножества \mathbb{F}_p . Тогда

$$|A + B| \geq \min(p, |A| + |B| - 1).$$

1. (а) Пусть утверждение теоремы верно для множеств $A' = A \cup B$, $B' = A \cap B$. Докажите, что оно верно и для множеств A , B .
- (б) Докажите, что если $|A| \geq 2$, $|B| \leq p - 1$, то существует такое $c \in \mathbb{F}_p$, что

$$A + \{c\} \neq (A + \{c\}) \cap B \neq \emptyset.$$

- (в) Докажите теорему индукцией по $\min(|A|, |B|)$.

¹Оно называется *супремумом* $\sup a_n$ или *точной верхней гранью* множества $\{a_n\}$. Двойственное понятие называется *инфимумом* $\inf a_n$ или *точной нижней гранью*.

2. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Коши-Дэвенпорта для множеств A_1, A_2, \dots, A_k .
3. Пусть p — простое число, k и d — натуральные. Докажите, что:
- (а) Существуют такие натуральные a и b , что $a^2 + b^2 - k$ делится на p .
- (б) Существуют такие натуральные a_1, a_2, \dots, a_d , что $a_1^d + a_2^d + \dots + a_d^d - k$ делится на p .
4. Для данного составного n приведите пример множеств A и B , для которых не выполнена теорема Коши-Дэвенпорта.
5. Даны n натуральных чисел, взаимно простых с n . Докажите, что для любого a можно выбрать несколько из них так, чтобы их сумма была сравнима с a по модулю n .
6. Дано множество X из 10000 целых чисел, ни одно из которых не делится на 47. Докажите, что существует такое $Y \subset X$, состоящее из 2007 элементов, что для любых $a, b, c, d, e \in Y$ значение $a - b + c - d + e$ не делится на 47.

Теорема Эрдёша-Гинзбурга-Зива. Среди любых $2n - 1$ целого числа можно выбрать n , сумма которых делится на n .

7. (а) Приведите пример $2n - 2$ целых чисел, из которых нельзя выбрать n , сумма которых делится на n .
- (б) Докажите утверждение теоремы для простого n .
- (в) Докажите, что если утверждение теоремы верно для $n = a$ и $n = b$, то оно верно и для $n = ab$.
8. Пусть $m \geq k \geq 2$, причём m делится на k . Докажите, что среди любых $m + k - 1$ целого числа можно выбрать m , сумма которых делится на k .

Двойное отношение

10 июля

Опр. Простым отношением трёх точек A, B, C , лежащих на одной прямой, называется отношение длин (направленных) отрезков

$$(AB; C) = \frac{AC}{CB}.$$

Оно положительно, если отрезки сонаправлены, и отрицательно, если противоположны.

I. (а) На прямой даны точки A и B . Исследуйте, где находится точка C , для которой простое отношение $(AB; C)$ равно

$$-\frac{99}{100}, \quad -\frac{1}{3}, \quad 0, \quad 1, \quad 100, \quad 10^{10}, \quad -100, \quad -3, \quad -\frac{101}{100} ?$$

(б) Почему для бесконечно удалённой точки C на прямой AB естественно считать, что $(AB; C) = -1$?

Опр. Двойным отношением четвёрки точек A, B, C, D , лежащих на одной прямой, называют число

$$(AB; CD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{(AB; C)}{(AB; D)}.$$

II. Как по отношению к AB могут располагаться точки C и D , если двойное отношение $(AB; CD)$ больше 1? От 0 до 1? Отрицательно?

III. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой, а точка O на ней не лежит. Докажите, что:

(а) Докажите, что

$$(AB; CD) = \frac{\sin(\angle AOC)}{\sin(\angle COB)} : \frac{\sin(\angle AOD)}{\sin(\angle DOB)}.$$

(б) Изменится ли это равенство, если точка A — бесконечно удалённая?

(в) Докажите, что двойное отношение четвёрки точек, лежащих на одной прямой, сохраняется при центральном проектировании.

(г) Даны три точки на прямой. Докажите, что их простое отношение сохраняется при центральном проектировании только в том случае, если бесконечно удалённая точка на данной прямой переходит в бесконечно удалённую.

Опр. Четвёрка A, B, C, D , для которой $(AB; CD) = -1$, называется гармонической.

1. (а) Пусть точки O, A, B на прямой l имеют координаты $0, a$ и b соответственно. Докажите, что существует единственная точка C такая, что $(AB; OC) = -1$, и её координата равна среднему гармоническому a и b .

(б) На диаметре AB окружности ω выбрана точка P . Точка P' инверсна ей относительно ω . Докажите, что $(AB; PP') = -1$.

(в) Пусть внутренние касательные окружностей ω_1 и ω_2 пересекаются в точке X , а внешние — в точке Y . Докажите, что центры окружностей и точки X, Y образуют гармоническую четвёрку.

2. (а) В треугольнике ABC чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке D . Докажите, что четвёрка A, B, C_1, D — гармоническая.

(б) Пусть в треугольнике ABC биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B пересекают прямую AC в точках M и N . Докажите, что $(AC; MN) = -1$.

3. Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке A . На прямой l_1 выбраны точки B_1, C_1, D_1 , а на l_2 — точки B_2, C_2, D_2 . Оказалось, что $(AB_1; C_1D_1) = (AB_2; C_2D_2)$. Докажите, что прямые B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 пересекаются в одной точке, либо параллельны.
4. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , а продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках E и F . Через точку O проведена прямая, параллельная EF и пересекающая противоположные стороны четырёхугольника в точках X и Y . Докажите, что точка O делит отрезок XY пополам.
5. Точка P — основание внутренней биссектрисы угла C треугольника ABC , а точка Q — внешней. Точка M — середина стороны BC . Прямые PM и AC пересекаются в точке X . Докажите, что $QX = CX$.
6. Дан прямоугольник $ABCD$. На продолжении стороны CD за точку D отмечена точка P . Пусть M и N — середины сторон AD и BC соответственно. Прямые PM и AC пересекаются в точке Q . Докажите, что NM — биссектриса угла PNQ .
7. Даны треугольник ABC и прямая l . Обозначим через A_1, B_1, C_1 середины отрезков, отсекаемых на прямой l углами A, B, C , а через A_2, B_2, C_2 — точки пересечения прямых AA_1 и BC, BB_1 и AC, CC_1 и AB . Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.

Внутренний матбой

10 июля

1. Клетки квадрата 15×15 заполнены нулями. За одну операцию можно выбрать квадрат 4×4 , состоящий из 16 клеток, и прибавить по 1 ко всем числам в его клетках. При каком наибольшем k после 2015 таких операций заведомо найдутся четыре клетки, центры которых образуют квадрат (стороны которого не обязаны быть параллельными сторонам исходного квадрата), сумма чисел в которых не меньше k ?
2. В треугольнике ABC , в котором угол C — тупой, провели внешнюю биссектрису этого угла. Она пересекла высоты треугольника ABC , проведённые из вершин A и B , соответственно в точках X и Y . На отрезках AY и BX отмечены соответственно точки P и Q так, что $\angle CAB = \angle CPY$ и $\angle CBA = \angle CQX$. Докажите, что точки X, Y, P, Q лежат на одной окружности.
3. Найдите все функции $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ такие, что равенство $f(x \cdot f(x) + y) = f(y) + x^2$ выполняется для всех рациональных чисел x и y .
4. Из таблицы 20×20 вырезали прямоугольники $1 \times 20, 1 \times 19, \dots, 1 \times 1$. Докажите, что наибольшее количество прямоугольников 1×2 , которое заведомо можно вырезать из оставшейся части таблицы, равно 85.

5. Докажите, что при $a, b, c \in [1, 2]$ выполнено неравенство

$$\frac{a}{b^2 + c^4 + 16} + \frac{b}{c^2 + a^4 + 16} + \frac{c}{a^2 + b^4 + 16} \geq \frac{1}{6}.$$

6. Рёбра полного графа на $n > 3$ вершинах покрашены в красный и синий цвета. Разрешается менять цвета рёбер в любом треугольнике на противоположные. Какое наибольшее количество одноцветных рёбер можно гарантировано получить такими операциями?

7. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота $АН$. Точка O — центр его описанной окружности, а точка P — центр окружности, описанной около треугольника $ВОС$. Медиана $НМ$ треугольника $АОН$ пересекает отрезок AP в точке Q . Докажите, что точка Q' , симметричная точке Q относительно прямой PM , лежит на описанной окружности треугольника $МОР$.

8. У Жени есть k коробок и n шаров, промаркированных числами от 1 до n . Изначально все шары находятся в одной коробке. Каждым ходом она выбирает коробку и перекладывает из неё шар с наименьшим номером, пусть i , либо в пустую коробку, либо в коробку, содержащую шар с номером $i + 1$. При каких k и n Женя может добиться того, чтобы в какой-то момент нашлась коробка, в которой лежит только шар с номером n ?

Теорема Чевы в направленных

12 июля

I. На прямых AB , BC и AC выбраны (возможно, бесконечно удалённые) точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно.

Теорема Чевы. Прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad (*)$$

Теорема Менелая. Точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1. \quad (\dagger)$$

1. (а) Как изменится простое отношение (AB, C_1) при проективном преобразовании, отправляющем середину AB на бесконечность?

(б) Сведите случай, когда некоторые из сомножителей в формуле $(*)$ отрицательны, к классической теореме Чевы.

(в) Как вывести теорему Менелая (†) из теоремы Чебы (★) ?

II. Докажите следующие утверждения при помощи теоремы Чебы или Менелая:

(а) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам;

(б) В трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

III. Зафиксируем обозначения для следующих направленных углов:

$$\angle CAA_1 = \alpha_1, \quad \angle A_1AB = \alpha_2,$$

$$\angle ABB_1 = \beta_1, \quad \angle B_1BC = \beta_2,$$

$$\angle BCC_1 = \gamma_1, \quad \angle C_1CA = \gamma_2.$$

Тригонометрическая теорема Чебы

Прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1. \quad (\star\star)$$

2. (а) Убедитесь, что $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_1} \cdot \frac{AC}{BC}$ и сведите формулу (★) к формуле (★).

(б) **Изогональное сопряжение.** Докажите, что если прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке, то и прямые, симметричные им относительно биссектрис углов A , B и C соответственно, тоже пересекаются в одной точке.

(в) Точку P отразили относительно сторон треугольника ABC . Докажите, что центр окружности, проходящей через получившиеся три точки, изогонально сопряжён точке P .

3. Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC .

(а) **Прямая Симсона.** Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника, лежат на одной прямой.

(б) Докажите, что точкой, изогонально сопряжённой P , является бесконечно удалённая точка, задающая направление, перпендикулярное прямой Симсона точки P .

4. **Точка Торричелли.** На сторонах треугольника ABC вне его построены правильные треугольники BCA_1 , CAB_1 и ABC_1 . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

5. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Внеписанная окружность касается продолжения стороны BC за точку C в точке A_1 . Докажите, что точки B_1 , C_1 , A_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда угол C прямой.

6. Прямые AP , BP , CP пересекают стороны BC , CA , AB треугольника ABC соответственно в точках A_1 , B_1 , C_1 . Описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ вторично

пересекает прямые BC , CA , AB в точках A_2 , B_2 , C_2 . Докажите, что прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в одной точке

7. Прямая Паскаля. Касательные в вершинах треугольника к его описанной окружности пересекают продолжения сторон в точках A_1 , B_1 , C_1 . Докажите, что данные точки лежат на одной прямой.

8. (а) Через точки M и N вне окружности ω проведены две касательные MP и NQ . Докажите, что точка пересечения L прямых MN и PQ такова, что $\frac{ML}{LN} = \frac{MP}{NQ}$.

(б) Докажите, что во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ точки пересечения противоположных сторон AB и CD , BC и AD , а также точки пересечения касательных в противоположных вершинах A и C , B и D , лежат на одной прямой.

9. Теорема о трёх колпаках. На плоскости даны три непересекающиеся окружности попарно различных радиусов. К каждому двум окружностям проведены две общие внешние касательные, и отмечена точка их пересечения. Докажите, что полученные три точки лежат на одной прямой.

10. (а) Теорема Паскаля. Докажите, что во вписанном в окружность шестиугольнике $ABCDEF$ точки пересечения противоположных сторон AB и DE , BC и EF , CD и AF лежат на одной прямой.

(б) Докажите, что диагонали данного шестиугольника пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

Весовые коэффициенты

12 июля

1. По окружности отметили 40 красных, 30 синих и 20 зеленых точек. На каждой дуге между соседними красной и синей точками поставили цифру 1, на каждой дуге между соседними красной и зеленой — цифру 2, а на каждой дуге между соседними синей и зеленой — цифру 3. На дугах между одноцветными точками поставили 0. Найдите максимальную возможную сумму поставленных чисел.

2. Одна бактерия сидит в точке $(0, 0)$. За ход одна бактерия в точке (i, j) пропадает, а в точках $(i + 1, j)$ и $(i, j + 1)$ появляется по бактерии — если обе эти клетки до хода были пусты. Докажите, что хотя бы в одной клетке с суммой координат не более 3 всегда будет хотя бы одна бактерия.

3. Несколько камней были разложены в N кучек. Затем камни разложили по-другому, в $n < N$ кучек. Докажите, что хотя бы $N - n + 1$ камень попал в кучки большего размера, чем те, в которых они лежали изначально.

4. Клетки доски $m \times n$ покрашены в два цвета. Известно, что на какую бы клетку ни поставить ладью, она будет бить больше клеток не того цвета, на котором стоит

(клетка под ладьей тоже считается побитой). Докажите, что на каждой вертикали и каждой горизонтали клеток обоих цветов поровну.

5. Есть бесконечно много комнат в ряд, в некоторых живут пианисты (всего их конечное число, в комнате может жить несколько пианистов). Каждый день одна пара пианистов в соседних комнатах решает, что они мешают друг другу играть, и разъезжается – левый пианист в соседнюю комнату слева, а правый пианист — в соседнюю комнату справа. Докажите, что через некоторое время переселения прекратятся.

6. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камней (возможно, по несколько в одной клетке). Разрешается выполнять следующие действия:

1. Снять по одному камню с клеток $n - 1$ и n и положить один камень в клетку $n + 1$;

2. Снять два камня с клетки n и положить по одному камню в клетки $n + 1$ и $n - 2$.

Докажите, что при любой последовательности действий мы достигнем ситуации, когда указанные действия больше выполнять нельзя, и эта конечная ситуация не зависит от последовательности действий (а зависит только от начальной раскладки камней по клеткам).

7. В квадрат 10×10 по порядку расставлены числа от 1 до 100. За ход можно: выбрать число, и прибавить к нему 2, а из двух соседей, лежащих с ней на одной прямой, вычесть по 1. Или, наоборот: отнять 2 и прибавить к двум соседям по 1. В конце снова получилась расстановка чисел от 1 до 100. Докажите, что она совпала с исходной.

8. За круглым столом сидят $2n$ человек, у которых есть m печенек на всех. Любой человек, у которого есть хотя бы две печеньки, может съесть одну из них и дать одну печеньку соседу. Один из сидящих за столом — Вася. При каком наименьшем m люди, сидящие за столом, при любом начальном распределении печенек смогут добиться того, чтобы Вася получил хотя бы одну печеньку?

9. Есть две полоски длиной k . В самой левой клетке каждой из полосок стоит $n < 2^{k-3}$ фишек. Петя и Вася играют в игру: Петя ходит первым и своим ходом двигает своим ходом произвольное множество фишек на одну клетку вправо, а Вася снимает с поля все только что сдвинутые фишки на одной из полосок по своему выбору. Докажите, что Вася сможет сделать так, что ни одна из фишек ни на секунду не окажется на правой клетке.

Связность и разделяющие множества

13 июля

Опр. Пусть $R \subset E(G) \cup V(G)$. Через $G - R$ обозначим граф, полученный из G удалением всех рёбер и вершин из R , а также всех рёбер, инцидентных вершинам из R .

Опр. Назовём множество R разделяющим, если граф $G - R$ несвязен.

Опр. Разделяющее множество R называется вершинным, если $R \subset V(G)$. Аналогично определяется рёберное разделяющее множество.

Опр. Пусть $X \not\subset R, Y \not\subset R$. Будем говорить, что R разделяет множества X и Y , если никакие две вершины $v_x \in X$ и $v_y \in Y$ не лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

Опр. Граф G называется k -связным, если $v(G) > k$ и минимальное вершинное разделяющее множество в графе G содержит хотя бы k вершин. Аналогично определяется k -рёберно-связный граф.

Опр. Разделяющее множество, состоящее из одной вершины, называется точкой сочленения.

1. Пусть M — множество из k вершин в k -связном графе, разделяющее его на $m \geq 2$ компонент связности. Докажите, что количество рёбер, проведённых из вершин M к оставшимся вершинам графа, не меньше mk .

2. Пусть G — двусвязный граф, $v(G) \geq 4$, $e \in E(G)$. Докажите, что хотя бы один из графов $G - e$ и $G \cdot e$ двусвязен.

3. Граф G связан. Назовём *разделителем* минимальное по включению вершинное разделяющее множество. Пусть S и R — разделители графа G . Известно, что S не разделяет R . Докажите, что R не разделяет S (возможно, $|R| \neq |S|$).

4. Пусть G — k -рёберно-связный граф, $v(G) = n$. Докажите, что из него можно удалить часть рёбер, оставив не более $k(n-1)$ из них, так, чтобы он остался k -рёберно-связным.

5. Известно, что граф G на n вершинах является двусвязным, но при этом содержит разделяющее множество из 2 смежных вершин. Докажите, что G содержит двусвязный подграф (не равный G), в котором больше $\frac{n}{2}$ вершин.

6. Назовём ребро графа *разделяющим*, если два конца этого ребра образуют разделяющее множество. В графе расстояние между любыми вершинами не превосходит d , и для любой вершины есть другая на расстоянии d от неё. Докажите, что не более трети всех рёбер графа являются разделяющими.

7. Пусть A и B — два минимальных по включению разделяющих рёберных множества в графе G . Докажите, что $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ также является разделяющим.

8. Докажите, что из двусвязного графа, степени всех вершин которого хотя бы три, можно так выбросить вершину, чтобы граф остался двусвязным.

Непрерывность в точке

14 июля

Опр. Дано подмножество E вещественной прямой. Функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке a , если выполнено любое из следующих равносильных условий:

- Для любой последовательности $\{a_n\} \subseteq E$, сходящейся к a , последовательность $\{f(a_n)\}$ сходится к $f(a)$;
- Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $|x - a| < \delta$, то $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Говорят, что функция f непрерывна, если она непрерывна в каждой точке области определения.

I. Определите, в каких точках непрерывны функции

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x); \quad f(x) = [x], \quad f(x) = 1/x, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

II. Функции $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны. Проверьте, что функции $f + g$, $f \cdot g$, $g \circ f$ также непрерывны. Что можно сказать о функции f/g ?

Опр. Если последовательность $\{a_n\}$ такова, что для любого k только конечное число членов последовательности меньше k , то говорят, что она стремится к бесконечности.

III. Что означает запись $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$? Определите двумя способами, докажите их равносильность.

1. Докажите, что условия в первом определении действительно равносильны.

2. Функция f , заданная на отрезке $[a, b]$, непрерывна. Докажите, что:

- (а) Не существует последовательности $\{a_n\} \subset [a, b]$ такой, что $f(a_n) > k$ для любого k .
 (б) На отрезке $[a, b]$ существуют точки c и c' такие, что

$$\forall x \in [a, b] \quad f(c) \leq f(x) \leq f(c').$$

(в) При любом $f(c) \leq y \leq f(c')$ найдётся $x \in [a, b]$, для которого $f(x) = y$.

Таким образом, мы доказали три важные теоремы:

- Непрерывная функция на отрезке ограничена.
- Непрерывная функция на отрезке достигает максимума и минимума.
- Непрерывная функция на отрезке принимает все промежуточные значения.

3. (а) Докажите, что на экваторе существует пара диаметрально противоположных точек с одинаковой температурой воздуха.

(б) Вчера в полночь было холоднее, чем в полночь позавчера и сегодня. Докажите, что найдется один и тот же момент времени вчера и сегодня, когда температура была одинакова.

4. В противоположных углах квадратного пруда со стороной 10 м находятся два лебедя. Поплавав по пруду, они оказались в двух других противоположных углах. Докажите, что в некоторый момент расстояние между кончиками их клювов было ровно 12 м.

5. Имеется бутерброд с колбасой и сыром. Докажите, что можно одним взмахом ножа поделить поровну **(а)** хлеб; **(б)** хлеб и колбасу; **(в)** хлеб, колбасу и сыр.

6. Непрерывная функция $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такова, что $f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что для каждого $\lambda \in [0, 1]$ на графике f найдётся горизонтальная хорда длины λ .

7. На отрезке $[0, 1]$ отмечены точки x_1, \dots, x_n . Докажите, что на нём найдётся точка x такая, что

$$\frac{|x_1 - x| + \dots + |x_n - x|}{n} = \frac{1}{2}.$$

8. (а) Функция Римана. Функция $f(x)$ равна нулю, если x иррационально, и равна $1/b$, если x представлено в виде несократимой дроби a/b . Определите, в каких точках данная функция непрерывна.

(б) Существует ли непрерывная функция, которая в рациональных точках принимает иррациональные значения, а в иррациональных — рациональные?

(в) Придумайте функцию, которая была бы определена на всей вещественной прямой и была бы непрерывна ровно в двух её точках.

Полярное соответствие

14 июля

Опр. На плоскости дана окружность ω с центром в точке O . Для точки A построена инверсная ей точка A' . Через точку A' проведена прямая a , перпендикулярная OA' . Прямая a называется полярной точки A ; точка A называется полюсом прямой a .

Будем обозначать точки плоскости большими латинскими буквами, а соответствующие им поляры — маленькими: $A \leftrightarrow a, B \leftrightarrow b, C \leftrightarrow c, \dots$

I. Докажите следующие свойства:

(а) Точка B лежит на прямой a тогда и только тогда, когда A лежит на прямой b .

(б) Если точки A и B лежат на прямой c , не проходящей через O , то C — точка пересечения a и b .

(в) Что будет, если прямая c всё-таки проходит через точку O ? Какую точку проективной плоскости естественно считать её полюсом? Какую прямую естественно считать полярной точки O ?

Полярная двойственность

Для любого утверждения проективной геометрии можно построить «полярно двойственное» при помощи следующей замены:

Точка	Прямая
Полюс	Поляра
Треугольник	Тройка прямых
Четырёхугольник	Четвёрка прямых
Лежит на	Проходит через
Лежат на одной прямой	Проходят через одну точку
Касательная	Точка касания

Опр. Прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке. Двойным отношением четвёрки прямых называется число

$$(ab; cd) = \frac{\sin(a, c)}{\sin(c, b)} : \frac{\sin(a, d)}{\sin(d, b)}.$$

II. Докажите следующие свойства:

(а) Угол (a, b) между полярами точек A и B равен углу AOB ;

(б) Если точки A, B, C, D лежат на одной прямой, то их двойное отношение равно двойному отношению соответствующих им поляр.

1. (а) Из точки A , лежащей вне окружности ω , провели к ней касательные AX и AU . Докажите, что XU — поляра точки A .

(б) К окружности ω проведены касательные a и b . Они высекают отрезок XU на третьей касательной c . Докажите, что угол XOU не зависит от положения касательной c .

2. Гармонический четырёхугольник. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω . Известно, что касательные к ω , проведённые в точках A и C , пересекаются на прямой BD . Докажите, что касательные, проведённые в точках B и D , пересекаются на прямой AC .

3. Для следующих утверждений сформулируйте полярно двойственные:

(а) Через любые две точки можно провести единственную прямую.

(б) Три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их поляры пересекаются в одной точке.

(в) **Точка Жергонна.** Прямые, соединяющие точки касания вписанной окружности треугольника с противоположными вершинами, пересекаются в одной точке.

(г) **Теорема Брианшона.** В описанном около окружности шестиугольнике три диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

- (д) **Теорема Дезарга.** Прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке. Тогда точки пересечения прямых AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1 лежат на одной прямой.
4. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC , CA и AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Прямые AC и A_1C_1 пересекаются в точке B' . Докажите, что прямая BB_1 перпендикулярна прямой, проходящей через B' и центр вписанной окружности.
5. Биссектрисы внешних углов треугольника ABC пересекают продолжения противоположных сторон в точках A' , B' , C' . Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.
6. **Лемма 255.** Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно. Прямая A_1C_1 пересекает биссектрису угла BAC в точке Q . Докажите, что угол CQA прямой.
7. (а) Через точку A к окружности ω проведена секущая CD . Поляра a пересекает CD в точке B . Докажите, что четвёрка точек A, B, C, D — гармоническая.
- (б) **Основное свойство полярного соответствия.** Через точку A к окружности ω проведена пара секущих KL и MN . Докажите, что KM пересекает LN на прямой a .
8. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H . Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке X . Докажите, что прямая XH перпендикулярна медиане из вершины C .
9. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность ω . Диагональ AC пересекает ω в точках P и Q . Точка M — середина PQ . Докажите, что $\angle BMC = \angle DMC$.

Линейность в комбинаторике

15 июля

1. Имеется 17 ящиков. В каждом лежит некоторое число монет. Разрешается выбрать любые 11 ящиков и добавить в каждый из выбранных ящиков по монете. Докажите, что такими операциями можно уравнивать число монет в ящиках.
2. По кругу расставлены 256 целых чисел. Каждую минуту все числа одновременно заменяются на сумму своих соседей. Докажите, что вскоре все числа будут делиться на 256.
3. В каждой клетке таблицы 100×100 стоит либо $+$, либо $-$. За ход можно поменять знаки в одном столбце и в одной строке одновременно. Можно ли получить любое расположение знаков, если первоначально стоят только плюсы?
4. Дана таблица с n столбцами и $n+1$ строками, в которой отмечено несколько клеток. Докажите, что можно выбрать такое непустое множество строк, что в его пересечении с любым столбцом будет четное количество отмеченных клеток.
5. По окружности расставлены $p > 2$ целых чисел (p — простое). Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p^{2025} , если за ход из каждого числа

вычитается его: **(а)** левый сосед; **(б)** k -ый сосед слева, k фиксировано; **(в)** k -ый сосед слева, k может меняться от хода к ходу

6. В клетчатой таблице **(а)** 4×4 ; **(б)** 6×6 идет игра "Жизнь" по следующим правилам: клетка живет, если на предыдущем ходу у нее было нечетное число живых соседей (по стороне) и умирает в противном случае. Докажите, что при любом начальном положении позиция со временем зациклится и найдите максимально возможную длину такого цикла.

7. В каждой граничной клетке таблицы 2025×2025 поставили по целому числу. Докажите, что можно заполнить все остальные клетки целыми числами так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 3×3 , содержащемся в таблице, была равна нулю.

8. В социальной сети с фиксированным конечным числом пользователей каждый пользователь имеет фиксированный набор подписчиков среди остальных пользователей. Кроме того, каждый пользователь имеет некоторый начальный рейтинг — целое положительное число (не обязательно одинаковое для всех пользователей). Каждую полночь рейтинг каждого пользователя увеличивается на сумму рейтингов, которые имели его подписчики непосредственно перед полуночью. Пусть m — некоторое целое положительное число. Хакер, не являющийся пользователем сети, хочет, чтобы рейтинги всех пользователей делились на m . Раз в день он может либо выбрать некоторого пользователя и увеличить его рейтинг на 1, либо ничего не делать. Докажите, что через несколько дней хакер сможет достичь своей цели.

Матбой 8–9 профи

15 июля

1. Найдите все натуральные $n > 1$, удовлетворяющие следующему свойству: для любых целых чисел a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , сумма которых не делится на n , существует индекс i такой, что ни одно из чисел $a_i, a_i + a_{i+1}, \dots, a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+n-1}$ (все индексы смотрятся по модулю n) не делится на n .

2. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел a_1, a_2, \dots . Известно, что существует натуральное $N > 1$ такое, что для любого $n \geq N$ число $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1}$ целое. Докажите, что существует натуральное M такое, что $a_m = a_{m+1}$ для любого $m \geq M$.

3. В толпе людей G некоторые знакомы друг с другом (знакомство взаимно). Пусть A — произвольная группа людей, содержащая не больше половины толпы G . Те, кто не в группе A , но знаком хоть с кем-нибудь из A , образуют группу B . Оказалось, что для любой группы A соответствующая ей группа B такова, что $|B| \geq |A|$. Докажите, что можно выделить не менее двух третей толпы G и разбить её на пары знакомых.

4. Пусть ABC — остроугольный треугольник, H и O — его ортоцентр и центр описанной окружности соответственно. Прямые AO и BH пересекаются в точке D . Точка P на AB такова, что $PH = PD$. Докажите, что точки P, B, O и D лежат на одной окружности.
5. Дан n -мерный гиперкуб. Половина его вершин белые, остальные — чёрные. Докажите, что можно найти хотя бы 2^{n-1} рёбер с разноцветными концами.
6. На доске написано $2m \geq 4$ чисел $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, \dots, 2m \cdot (2m+1)$. Каждым ходом с доски стираются три числа a, b и c , вместо которых записывается число $\frac{abc}{ab+bc+ac}$. В конце осталось два числа, одно из которых равно $\frac{4}{3}$. Докажите, что второе число больше 4.
7. Пусть a, b, c — положительные числа, $a + b + (a + c)(b + c) = 5$. Докажите, что $abc(a + b + c) \leq 2$.
8. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC . На сторонах AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AM - MX = CY - YX$. Докажите, что угол XMY — острый.

Матбой 9–10 профи

15 июля

1. На плоскости нарисовали фиолетовый неравносторонний треугольник и его вписанную окружность. Затем голубым цветом провели три отрезка, соединяющие вершины фиолетового треугольника и точки касания вписанной окружности с противоположными сторонами. Рассмотрим длины всех 9 отрезков, на которые голубые отрезки разбиваются друг другом и вписанной окружностью. Какое минимальное количество различных длин могло получиться?
2. Саша заполняет клетки доски 99×99 натуральными числами от 1 до 99^2 (каждое число число по разу). Затем Игорь смотрит на доску, выбирает некоторое множество клеток, никакие две из которых не имеют общую сторону, а затем считает сумму чисел во всех выбранных клетках. Какое наибольшее значение данной суммы гарантированно сможет обеспечить Игорь?
3. Докажите, что уравнение $x^5 + y^3 + z^2 - 3xyz = 0$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.
4. Дано натуральное число $n > 3$ и положительные числа a_1, a_2, \dots, a_n . Докажите неравенство

$$\frac{a_1}{a_n + a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n-1} + a_n + a_1} < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

5. На берегу реки в ряд сидят 100 математиков. Каждый из них работает ровно над одной темой исследования, и если два математика работают над одной и той же темой, то все сидящие между ними также работают над ней. Марвин пытается выяснить для

каждой пары математиков, работают ли они над одной и той же темой. Ему разрешается задать каждому математику следующий вопрос: «Сколько из этих ста математиков работают над вашей темой?». Он задает вопросы по очереди, поэтому знает все предыдущие ответы, прежде чем задать следующий. Найдите наименьшее натуральное число k , при котором Марвин всегда может достичь своей цели, задав не более k вопросов.

6. На плоскости нарисован выпуклый многоугольник M и отмечена его вершина V . Пусть P — наибольший периметр треугольника, содержащегося в M , а P_V — наибольший периметр треугольника, содержащегося в M , одна из вершин которого — V . Какие значения может принимать P/P_V ?

7. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n > 1$. На плоскости нарисовали графики $y = P(x)$ и $x = P(y)$, сдвинутые на некоторые векторы. Оказалось, что n из общих точек сдвинутых графиков лежат на одной прямой, и эта прямая образует разные углы с координатными осями. При каких n такое возможно?

8. Назовем *интересными* 100-значные числа, в записи которых нет нулей, а каждая цифра встречается не более 20 раз. Докажите, что ровно треть из этих чисел делятся на 3.

9. В n -элементном множестве M выбрано n различных подмножеств A_1, \dots, A_n . Докажите, что для некоторого $x \in M$ множества $A_1 \cup \{x\}, \dots, A_n \cup \{x\}$ также различны.

10. Дан треугольник ABC . Точки M, N, K — середины сторон BC, CA, AB соответственно. Точка P на отрезке NK такова, что прямая AP — биссектриса угла BPC . Прямые MN и BP пересекаются в точке E , а прямые MK и CP — в точке F . Точка H — основание высоты из A в треугольнике ABC , а L — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников APH и HEF . Докажите, что прямые HL, MP и EF пересекаются в одной точке.

Многочлены: асимптотика и непрерывность

17 июля

1. Дан многочлен с вещественными коэффициентами $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$.

(а) Докажите, что $f(x)$ — непрерывная функция.

(б) Докажите, что отношение $f(x)/(a_n x^n)$ стремится к единице при x , стремящемся к бесконечности.

(в) Докажите, что любой многочлен нечётной степени принимает положительные и отрицательные значения, а также имеет хотя бы один корень.

2. Докажите, что для любого многочлена со старшим коэффициентом, равным 1, найдётся момент, начиная с которого его значения строго возрастают.

3. Существует ли квадратный многочлен, значения которого во всех целых точках — кубы натуральных чисел?

4. Даны многочлены $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Докажите, что при любых действительных a и b , сумма которых не равна 0, многочлен $af(x) + bg(x)$ имеет три различных действительных корня.

5. (а) Пусть $P(x)$ — многочлен нечетной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

(б) Дан многочлен $P(x)$, для которого уравнение $P(x) = x$ не имеет корней. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = x$ тоже не имеет корней.

6. Даны два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ с вещественными коэффициентами, причём у обоих старшие коэффициенты положительны. Известно, что при любом вещественном значении y числа $P(y)$ и $Q(y)$ либо одновременно целые, либо одновременно нецелые. Докажите, что $P(x) - Q(x) = \text{const}$.

7. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, который принимает положительные значения при $x \geq 1$. Докажите, что бесконечная десятичная дробь

$$\alpha = 0, f(1)f(2) \dots f(n) \dots$$

является иррациональным числом. Например, если $f(x) = x^2$, то получается иррациональное число $\alpha = 0, 149162536496481100 \dots$

8. Существует ли бесконечная последовательность a_0, a_1, a_2, \dots ненулевых вещественных чисел, такая что при всех натуральных n многочлен

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

имеет ровно n различных вещественных корней?

Гармонический четырёхугольник

18 июля

Опр. Дана окружность ω и произвольная точка P на ней. Двойным отношением $(AB; CD)$ четвёрки точек A, B, C, D на окружности ω называется двойное отношение четвёрки прямых PA, PB, PC и PD .

Если P совпадает с одной из данных точек, то секущая вырождается в касательную.

1. Проверьте следующие свойства:

(а) Двойное отношение точек на окружности не зависит от выбора точки P ;

(б) Численно оно равняется $\pm \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$;

(в) Двойное отношение четырёх точек сохраняется при инверсии в точке P .

(г) Сохраняется ли оно при инверсии в произвольной точке плоскости?

2. Через точку M , не лежащую на окружности, проводятся четыре секущие A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , A_4B_4 . Докажите, что $(A_1A_2; A_3A_4) = (B_1B_2; B_3B_4)$.

3. **Теорема о бабочке.** Пусть через точку M , которая является серединой хорды PQ некоторой окружности, проведены две произвольные хорды AB и CD . Хорды AD и BC пересекают отрезок PQ в точках X и Y . Докажите, что точка M является серединой отрезка XY .

Опр. Вписанный четырёхугольник $ABCD$, для которого $(AC; BD) = -1$, называется гармоническим.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что следующие условия равносильны:

- (а) $ABCD$ — гармонический;
- (б) Произведения длин противоположных сторон равны;
- (в) Биссектрисы углов B и D пересекаются на прямой AC ;
- (г) Биссектрисы внешних углов при вершинах B и D пересекаются на прямой AC ;
- (д) Касательные, проведённые в точках A и C , пересекаются на прямой BD ;
- (е) Прямая BD симметрична медиане треугольника ABC относительно биссектрисы угла B .

5. Пусть PA и PB — касательные к окружности, CD — секущая, проходящая через точку P , точка M — середина отрезка AB , K — вторая точка пересечения CM с окружностью. Докажите, что PM , AD и BK пересекаются в одной точке.

6. В треугольнике ABC вписанная окружность ω касается сторон в точках A_1 , B_1 , C_1 . Чевиана BB_1 вторично пересекает окружность в точке K . Точка N является пересечением прямой C_1A_1 и касательной к ω в точке K . Докажите, что $\sin(\angle A_1CN) = \sin(2 \cdot \angle A_1C_1B_1)$.

7. В окружности ω проведены две параллельные хорды AB и CD . Прямая, проведённая через C и середину AB , вторично пересекает ω в точке E . Точка K — середина отрезка DE . Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.

8. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность Ω , пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности Ω в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC , проведённую из вершины B .

9. На плоскости зафиксирована окружность ω , точка A вне её и касательная AT . Через точку A проводится секущая XY , а затем строится окружность, которая проходит через точки T и X , а также касается прямой TU . Докажите, что все такие окружности проходят через фиксированную точку, отличную от T .

10. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая l перпендикулярна BC и проходит через B . Две окружности с общей хордой CD касаются прямой l в точках P и Q . Докажите, что отрезки DP и DQ видны из середины AB под равными углами.

Последовательности

18 июля

1. Число $\alpha = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots}$ построено так: a_k — это первая цифра слева от запятой в десятичной записи числа $k\sqrt{2}$. Докажите, что α — иррациональное число.

2. Последовательность a_n такова, что $a_{n+1} = 1 - |1 - 2a_n|$ и $a_1 \in (0, 1)$.

(а) Докажите, что если a_1 рационально, то последовательность, начиная с некоторого места, периодическая.

(б) Докажите, что если последовательность, начиная с некоторого места, периодическая, то a_1 рационально.

3. Последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ задана следующим образом:

$$a_1 = a_2 = 1; \quad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}} \quad (n \geq 3).$$

Докажите, что все числа в последовательности — целые.

4. Числовая последовательность определяется условиями: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n + \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor$. Докажите, что среди членов этой последовательности бесконечно много полных квадратов.

5. По данному натуральному числу a_0 строится последовательность $\{a_n\}$ следующим образом: $a_{n+1} = a_n^2 - 5$, если a_n нечетно и $a_{n+1} = a_n/2$, если a_n четно. Докажите, что при любом нечетном $a_0 > 5$ в последовательности $\{a_n\}$ встретятся сколь угодно большие числа.

6. Рассмотрим степени пятерки: 1, 5, 25, 125, 625, ... Образует последовательность их первых цифр: 1, 5, 2, 1, 6, ... Докажите, что любой кусок этой последовательности, записанный в обратном порядке, встретится в последовательности первых цифр степеней двойки (1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, ...).

7. Последовательности положительных чисел (x_n) и (y_n) удовлетворяют условиям $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}^2$, $y_{n+2} = y_n^2 + y_{n+1}$ при всех натуральных n . Докажите, что если все числа x_1, x_2, y_1, y_2 больше 1, то $x_n > y_n$ при каком-нибудь натуральном n .

8. Последовательность задана соотношениями $x_1 = 1$, $x_{n+1} = (1 + \frac{3}{n})x_n + (2 - \frac{3}{n})$. Докажите, что все ее члены — натуральные числа.

9. Последовательность a_1, a_2, \dots такова, что $a_1 \in (1, 2)$ и $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_k}$ при любом натуральном k . Докажите, что в ней не может существовать более одной пары членов с целой суммой.

Теорема Турана

19 июля

1. Докажите, что в графе на n вершинах без треугольников не более чем $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ рёбер.

Опр. Через $ex(n, H)$ обозначим максимальное количество рёбер в графе на n вершинах, не содержащем подграфа, изоморфного H .

Опр. Пусть $n = q(m-1) + r$, где r — остаток от деления n на $m-1$. Обозначим через $T_{n,m}$ полный $(m-1)$ -дольный граф на n вершинах с r долями размера $q+1$ и $m-1-r$ долями размера q .

Теорема Турана. Если граф G на n вершинах не содержит полного подграфа на m вершинах и имеет $ex(n, K_m)$ рёбер, то G изоморфен $T_{n,m}$.

2. (а) Убедитесь, что в $T_{n,m}$ нет подграфа, изоморфного K_m .

(б) Посчитайте количество рёбер в графе $T_{n,m}$.

(в) Докажите, что среди всех $(m-1)$ -дольных графов на n вершинах граф $T_{n,m}$ имеет максимальное количество рёбер.

(г) Докажите, что если граф G на n вершинах не содержит полного подграфа на m вершинах и имеет $ex(n, K_m)$ рёбер, то G содержит полный подграф на $m-1$ вершине.

(д) Докажите теорему Турана.

3. Есть $2n+1$ батарейка ($n > 2$). Известно, что хороших среди них на одну больше, чем плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?

4. В графе на $2n$ вершинах n^2+1 ребро. Докажите, что в нём есть n треугольников.

5. Каждое ребро некоторого графа на 300 вершинах покрашено в красный или синий цвет так, что нет ни одного одноцветного треугольника. Какое наибольшее количество рёбер может быть в таком графе?

6. В графе G 19998 вершин. Известно, что в любом индуцированном подграфе на 9999 вершинах найдётся хотя бы 9999 рёбер. Какое наименьшее количество рёбер может быть в графе G ?

7. Докажите, что $ex(n, K_{2,2}) \leq \frac{n(1+\sqrt{4n-3})}{4}$.

Опр. Дистанционным графом на плоскости называется граф, вершины которого — это некоторые точки плоскости, а ребро проводится, если расстояние между точками равно 1.

8. (а) Для какого минимального m можно утверждать, что в дистанционном графе нет подграфа, изоморфного K_m ?
- (б) Теорема Турана для дистанционных графов на плоскости. В дистанционном графе G на плоскости $4n$ вершин. Известно, что в G нет антиклики на $n + 1$ вершине. Докажите, что $e(G) \geq 7n$.

Асимптотика в комбинаторике и ТЧ

19 июля

1. (а) Докажите, что существует число, большее 1000000, которое нельзя представить в виде суммы квадрата и куба натуральных чисел.
- (б) Докажите, что существует число которое можно представить в виде суммы трех квадратов не менее, чем 1000 способов.
2. Вася ставит на плоскость одну черную точку затем Петя – сто белых (в уже покрашенную точку снова ходить нельзя). Сможет ли Вася поставить черные точки в вершины правильного треугольника?
3. Дана строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$. Докажите, что:
- (а) Если $a_n < 100n$, то в десятичной записи какого-то члена последовательности встретится цифра 2.
- (б) Если $a_n < n^{10}$, то числа a_n в совокупности имеют бесконечное число простых делителей.
4. Верно ли, что из любого числа можно получить полный квадрат, добавляя к его десятичной записи не более 10 цифр? Цифры можно вставлять в любые места.
5. Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Докажите, что найдётся бесконечно много n , таких что (а) $S(3^{n+1}) \leq S(3^n)$; (б) $S(2^{n+1}) \leq S(2^n)$.
6. Клетки клетчатой плоскости пронумерованы натуральными числами. Докажите что есть две соседние клетки, номера которых отличаются хотя бы на 10^{100} .
7. (а) Из бесконечной клетчатой доски выкинули несколько клеток, никакие две из которых не являются соседними по стороне и по диагонали. Всегда ли оставшуюся часть можно разбить на доминошки?
- (б) Из бесконечной клетчатой доски выкинули все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли оставшуюся часть доски обойти ходом шахматного коня?
8. У Пети есть бесконечно много одинаковых треугольных салфеток. Докажите, что для достаточно большого R Петя сможет покрыть этими салфетками более 99% площади круглого стола радиуса R (салфетки не перекрываются, не вылезают за край стола, их можно переворачивать).

9. Пусть $d(m)$ — количество натуральных делителей числа m . Докажите, что последовательность $d(n^2 + 1)$ не является строго возрастающей ни с какого момента.
10. Существует ли отображение из шара радиуса 1 в круг радиуса 10^{100} , не уменьшающее никакие расстояния?

Построения одной линейкой

20 июля

В демоверсии программы Геогebra остались только три команды: «отметить точку», «провести прямую по двум точкам», «отметить точку пересечения двух прямых».

Все прочие геометрические шаблоны приобретаются поштучно за отдельную плату.

1. (а) Даны две параллельные прямые и отрезок на одной из них. Постройте середину этого отрезка. (б) Дан отрезок с отмеченной серединой. Проведите прямую, параллельную этому отрезку и проходящую через заданную точку. (в) Дан параллелограмм, точка P и прямая l . Как через точку P провести прямую, параллельную l ?
2. (а) Даны три точки, лежащие на одной прямой. Как построить точку, дополняющую их до гармонической четверки?
- (б) Прямые a, b, c, d образуют гармоническую четвёрку. Докажите, что если прямая a перпендикулярна прямой b , то b делит угол между c и d пополам.
- (в) На плоскости даны оси прямоугольной системы координат и прямая, проходящая через её центр. Как с помощью линейки отразить её относительно одной из осей?
3. На плоскости дана окружность ω . Как построить
- (а) Полюсу данной точки A ? Полюс данной поляры a ?
- (б) Касательную к ω из данной точки M вне окружности?
- (в) Перпендикуляр из данной точки P на окружности ω к её заданному диаметру?
4. Дана окружность ω и отмечен её центр — точка O .
- (а) Как через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой?
- (б) Как через точку O провести прямую, перпендикулярную заданному диаметру?
- (в) Дан отрезок AB и прямая l . Постройте на прямой l отрезок, равный отрезку AB .

5. Хулиган Каземир нарисовал на парте выпуклый четырёхугольник. Затем он решил дополнить рисунок так, чтобы четырёхугольник оказался левой нижней клеткой шахматной доски (к которой применили некоторое проективное преобразование). Как ему при помощи одной линейки начертить хотя бы соседнюю клетку?

6. (а) Даны две прямые l_1 и l_2 , которые пересекаются в точке P за пределами чертежа. Между этими прямыми находится точка Q . Как при помощи одной линейки построить прямую, проходящую через точки P и Q ?

(б) Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке P ; прямые m_1 и m_2 — в точке Q ; обе точки P и Q за пределами чертежа. При помощи одной линейки постройте ту часть прямой PQ , которая находится в пределах чертежа.

Результаты заключительного теста

20 июля

В конце смены детям была предложена следующая задача:

1. (а) Оцените **сложность** занятий по шкале

от 1 (кенгуру за три балла) ... до 7 (неподъёмная гробина);

(б) Оцените **новизну** занятий по шкале

от 1 (было на кружке 5 класса) ... до 7 (не видел ничего подобного).

С медианными значениями получившихся наборов можно ознакомиться в таблице:

Тема	(а)	(б)	Тема	(а)	(б)
1. Аффинная геометрия	3	5	14. Двойное отношение	3	3
2. Иррац. и рациональные	3	3	15. Весовые коэффициенты	3	3
3. Нерав-ва с фикс. величинами	3	3	16. Чева в направленных	3	3
4. Мн-ны с целыми коэфф-ми	3	3	17. Разделяющие мн-ва	5	5
5. Аффинная геометрия-2	3,5	5	18. Непр-ть в точке	4	4
6. Аддит. комб-ка. Разминка	4	5	19. Полярное соответствие	3	3
7. Аддит. комб-ка. Основной	7	7	20. Линейность в комб-ке	4	4
8. Теорема Кронекера	4	5	21. Асимптотика многочленов	4	4
9. Подсчёт в графах	3,5	3	22. Гармонический четырехуг-к	3	3
10. Проективная плоскость	3,5	5	23. Последовательности	4	3
11. Разностный многочлен	3	5	24. Асимптотика в комб-ке	4	4
12. Предел последовательности	3	3	25. Теорема Турана	4,5	3
13. Аддит. комб-ка. Завершение	5	6	26. Построения линейкой	3	4

До новых встреч в следующем году!

